

UA: Síntesis de mecanismos

Año de elaboración: 2018

HORAS TEÓRICAS	3.0
HORAS PRÁCTICAS	0.0
TOTAL DE HORAS	3.0
CRÉDITOS INSTITUCIONALES	6.0
TÍTULO DEL MATERIAL	Síntesis analítica de engranajes con dientes cilíndricos rectos
TIPO DE UNIDAD DE APRENDIZAJE	Curso
CARÁCTER DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE	Obligatoria
NÚCLEO DE FORMACIÓN	Integral
PROGRAMA EDUCATIVO	Ingeniería Mecánica
ESPACIO ACADÉMICO	Facultad de Ingeniería
RESPONSABLE DE LA ELABORACIÓN	Juan Carlos Posadas Basurto

Índice

	Página
Presentación	1
Estructura de la unidad de aprendizaje	2
Contenido de la presentación	3
Ruedas dentadas	6
Engranes rectos	7
Cremallera	8
Engranes internos o anulares	9
Engranes helicoidales	10
Engranes de espina de pescado	11
Engranes cónicos	12

	página
Tornillo sin fin	13
Terminología de un engrane recto	14
Ley fundamental del engranaje	15
Paso diametral	21
Dientes de engrane estándar	23
Distancia entre centros	24
Cinemática de un engrane recto	25
Trenes de engranajes simples	26
Diseño de trenes de engranaje	29
Ejemplo	30
Bibliografía	38

Presentación

- La Unidad de Aprendizaje Síntesis de Mecanismos es obligatoria y se sugiere cursarla en el octavo período.
- No tiene antecedente seriado pero se da un curso de Análisis de Mecanismos en el sexto periodo donde el discente realiza análisis cinemático y dinámico de mecanismos y elementos de máquinas, aplicando los fundamentos de Mecánica Clásica y el software adecuado para su comparación y selección).
- Se sugiere que el discente curse primero Análisis de Mecanismos para tener una idea general de su composición, movimientos y tipos que existen.

Estructura de la Unidad de Aprendizaje

1. SÍNTESIS GRÁFICA DE ESLABONAMIENTOS

1.1 Conceptos generales

1.2 Síntesis dimensional

1.3 Curvas de acoplador

2. SÍNTESIS ANALÍTICA DE ESLABONAMIENTOS

2.1 Generación de mecanismos de dos y tres posiciones por síntesis analítica

2.2 Síntesis analítica de cuatro o cinco posiciones

3. DISEÑO DE LEVAS

3.1 Síntesis gráfica de levas

3.2 Síntesis analítica de levas

3.3 Síntesis de mecanismos combinados

Contenido de la presentación

- La presentación comprende el punto 3.3 de la Estructura de la Unidad de Aprendizaje donde se estudia la síntesis analítica de mecanismos combinados, entre ellos los trenes de engranaje de dientes rectos.
- Inicia con el concepto de ruedas dentadas y los diferentes tipos de engranes estándares.
- Continúa con la terminología de los engranes con dientes rectos y la ley fundamental del engranaje.
- Se define el paso diametral y se da la ecuación para la distancia entre centros de engranaje utilizando paso diametral.

- Se dan los principio de diseño de un tren de engranaje con dientes rectos.
- Se aplica la teoría desarrollada en un ejemplo de tren de engranaje sencillo y con dientes rectos.
- Al final de la presentación se muestra la bibliografía utilizada en la presentación para que tanto los discentes como el docente puedan revisar y profundizar en alguno de los temas.



SÍNTESIS DE MECANISMOS

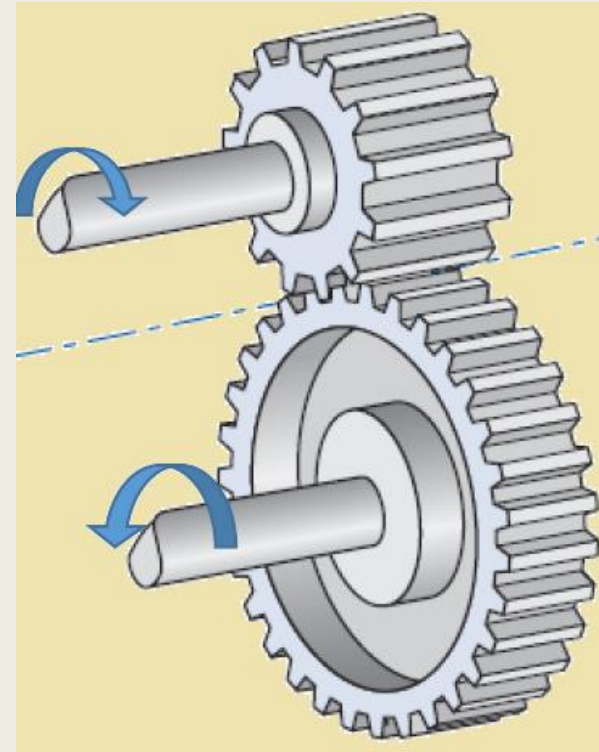
Síntesis analítica de engranajes con dientes
cilíndricos rectos

Ruedas dentadas (Martin, 1982)

- Existen mecanismos compuestos de cuerpos cilíndricos en contacto rodante. Su transmisión de potencia se limita por la fricción que existe entre las superficies de contacto.
- Para evitar deslizamiento entre las superficies se localizan dientes en los miembros que contactan. Los miembros resultantes son conocidos como engranes o ruedas dentadas.
- Los engranes se utilizan para transmitir movimiento de un eje giratorio a otro.
- También se utilizan para incrementar o disminuir la velocidad, o bien, para cambiar la dirección del movimiento de un eje a otro (Myszka, 2012).
- Los engranes pueden tener dientes rectos, helicoidales y cónicos.

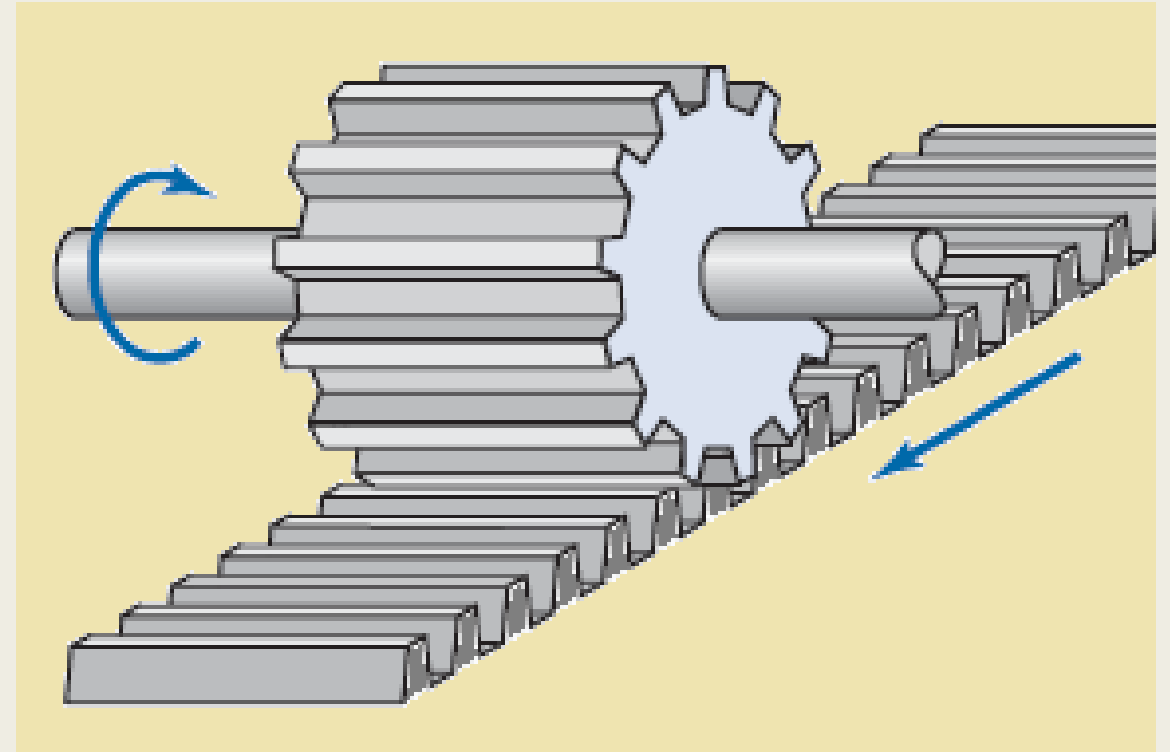
Engranes rectos (Myszka, 2012)

- Los engranes rectos son los más sencillos.
- Se conocen como engranes rectos por que los dientes son paralelos al eje de rotación.
- Sirven para transmitir movimiento entre ejes paralelos.
- Las ruedas giran en sentidos opuestos.



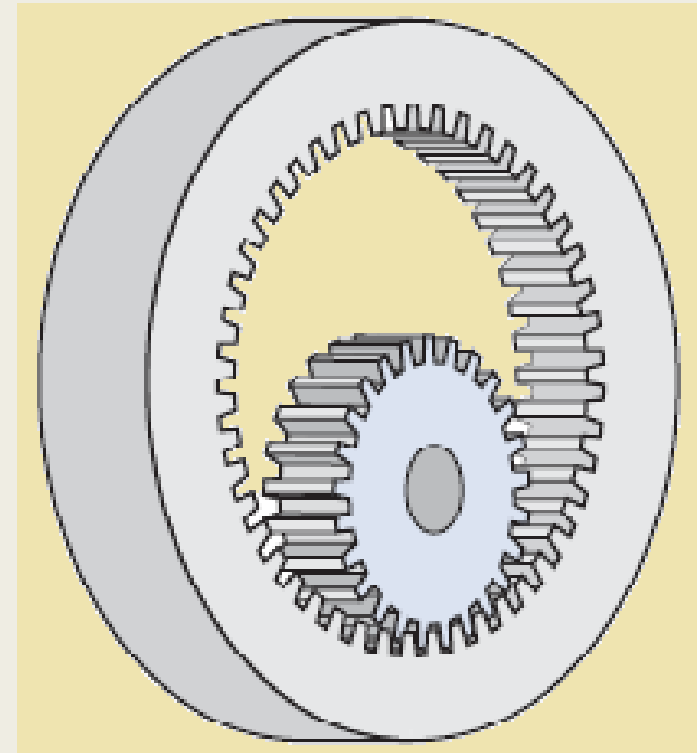
Cremallera (Myszka, 2012)

- La cremallera es un engrane recto con un diámetro infinitamente largo.
- Al acoplar con un engrane recto, se produce movimiento de traslación.



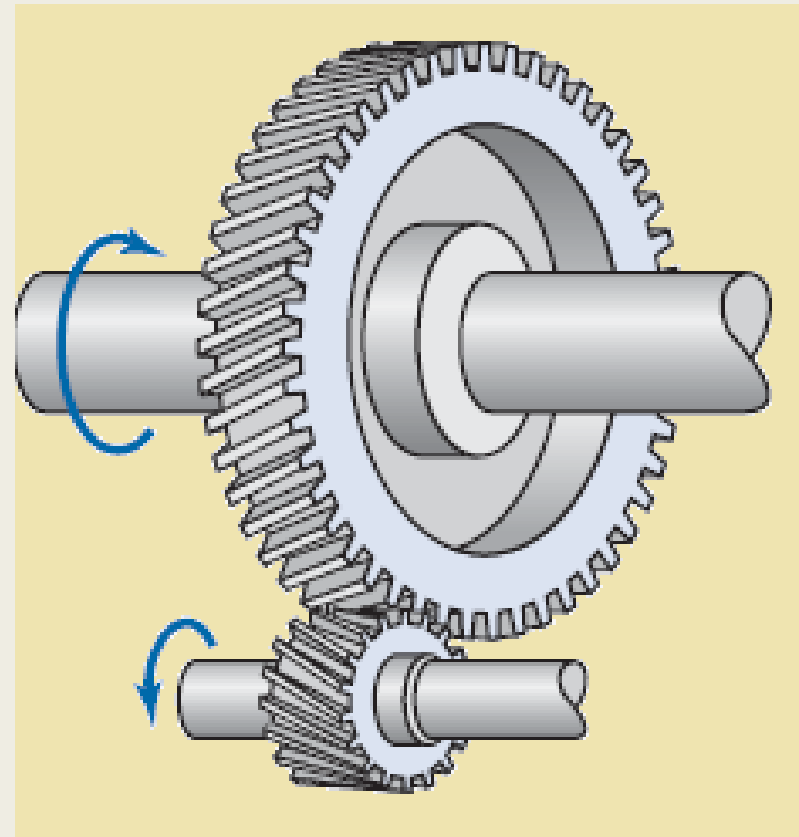
Engranes internos o anulares (Myszka, 2012)

- Los engranes internos o anulares tienen los dientes contruidos sobre la superficie interior de un círculo.
- Cuando se acoplan con un engrane recto, el engrane interno aporta la ventaja de reducir la distancia entre los centros de los engranes para lograr cierta variación de velocidad.
- Las dos ruedas giran en el mismo sentido.



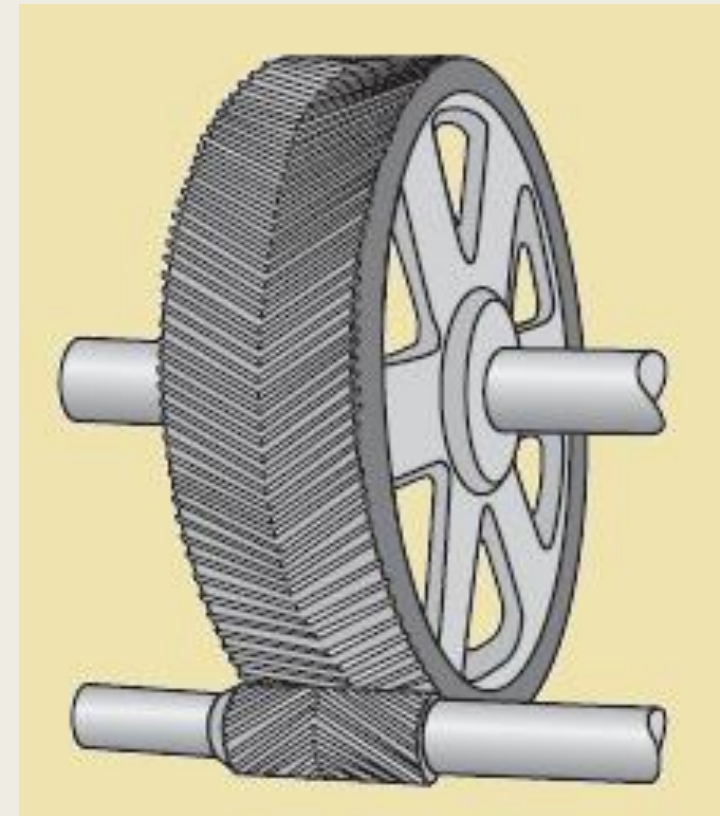
Engranajes helicoidales (Myszka, 2012)

- Tienen dientes inclinados respecto al eje de rotación.
- El ángulo de inclinación (o de hélice) brinda un mejor acoplamiento de los dientes y menor impacto y ruido.
- Su accionamiento es más suave que los engranes rectos y se aplican a alta velocidad.
- Dientes inclinados producen fuerzas de empuje y pares de flexión.



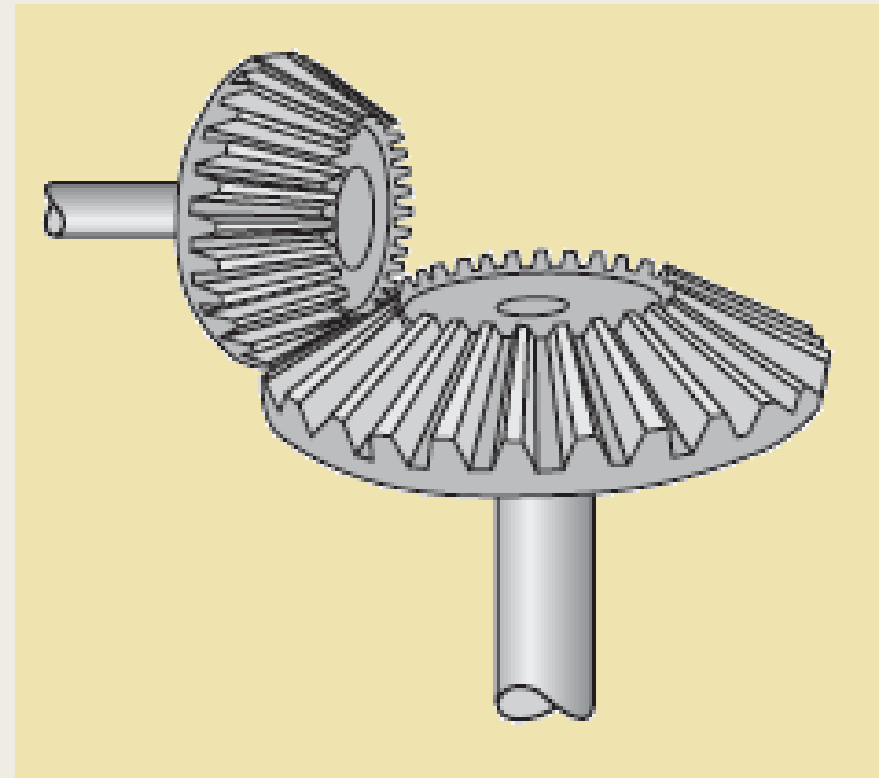
Engranes de espina de pescado (Myszka, 2012)

- Se utilizan en las mismas aplicaciones que los engranes rectos y helicoidales.
- También se conocen como engranes helicoidales dobles.
- Se parece a dos engranes helicoidales opuestos con los extremos colocados uno contra otro.
- Esta configuración sirve de contrapeso a la fuerza de empuje de un engrane helicoidal.



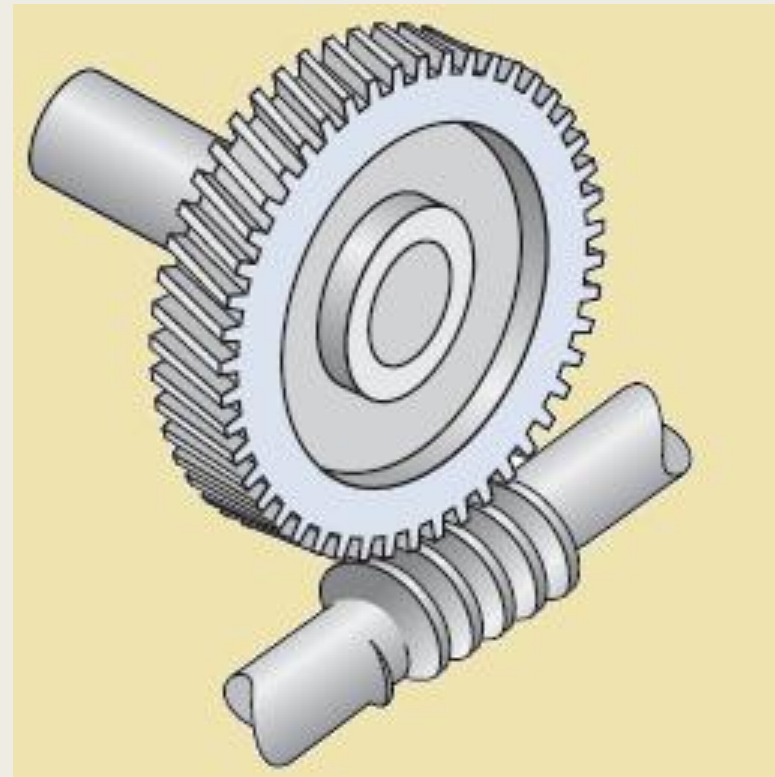
Engranes cónicos

- Los engranes cónicos tienen los dientes moldeados sobre una superficie cónica y sirven para transmitir movimiento entre ejes no paralelos.
- Se utilizan en aplicaciones con ejes cuyos ángulos son mayores y menores de 90° .
- Se diseñan en conjunto, por lo que no es posible sustituir un engrane para modificar la razón de engrane.



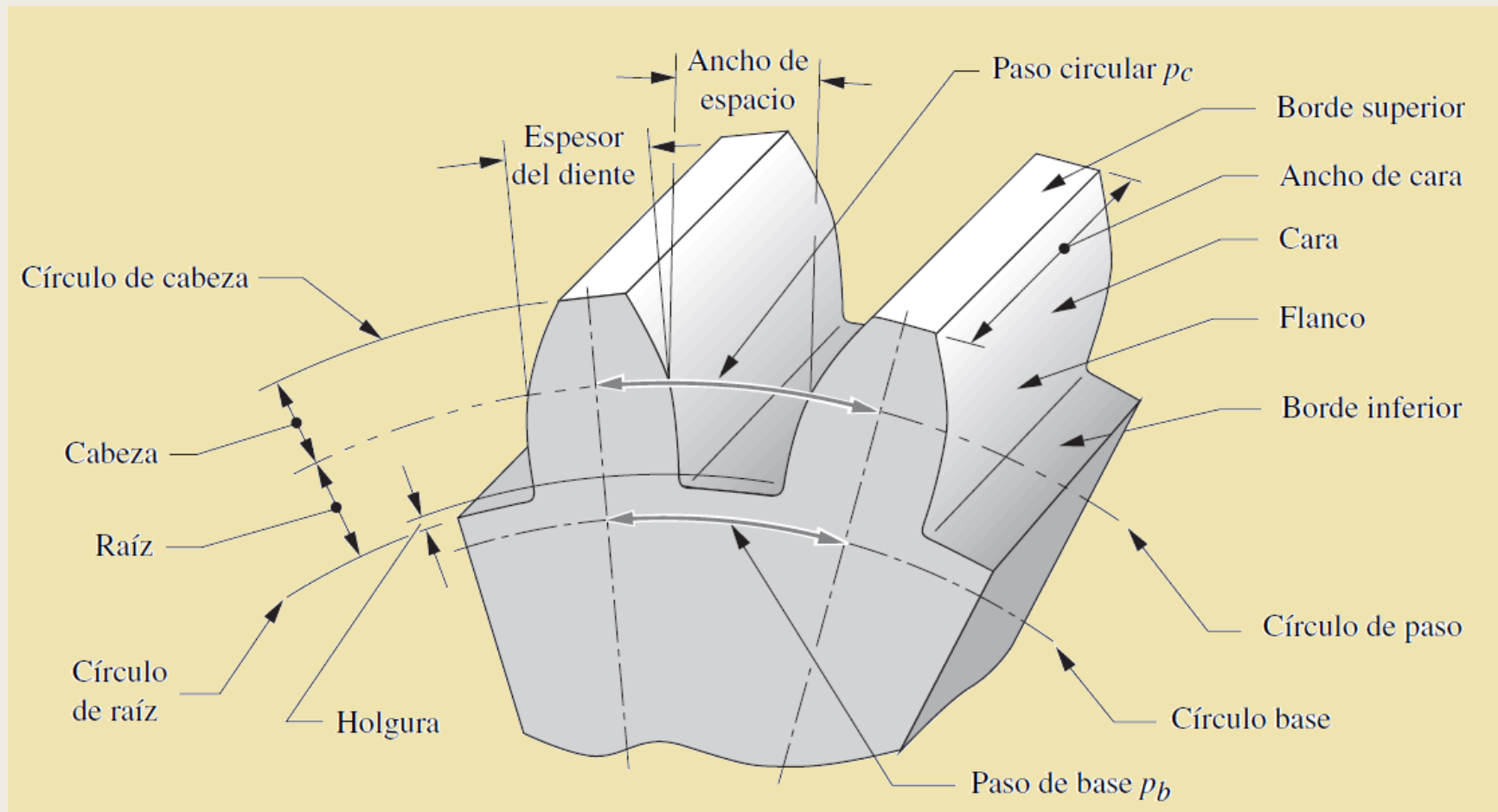
Tornillos sin fin

- Un tornillo sin fin y su engrane transmiten movimiento entre ejes no paralelos que no se intersecan.
- Tiene un diente (o cuerda) en forma de espiral alrededor de un cilindro de paso y genera fuerzas axiales.
- Impulsa al engrane para obtener velocidades reducidas.
- Por lo general un engrane sin fin no es reversible y no puede impulsar el tornillo.



Terminología de un engrane recto

(Norton, 2009)



Ley fundamental de engranaje (Norton, 2009)

- La ley fundamental de engranaje establece que la relación de velocidad angular m_V entre dos engranes en contacto permanece constante.

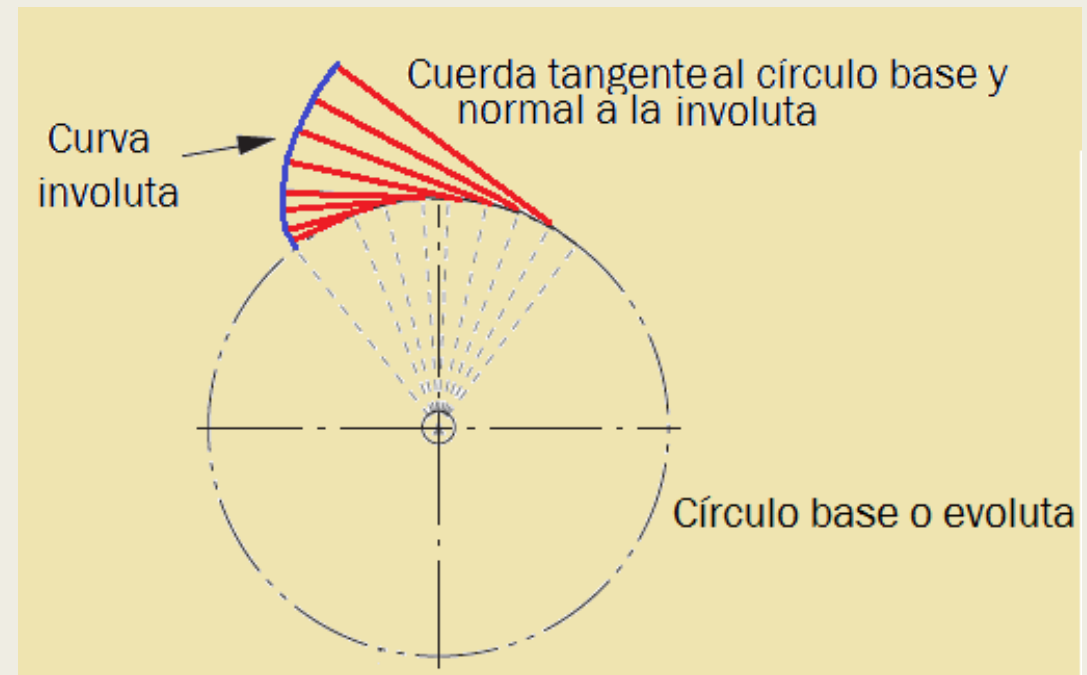
$$m_V = \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \pm \frac{r_{entrada}}{r_{salida}} = \pm \frac{d_{entrada}}{d_{salida}}$$

- donde ω, r, d son la velocidad angular, el radio y el diámetro, respectivamente, de los engranes de entrada y salida. Los radios y diámetros son los de los cilindros rodantes a los que se agregan los dientes.
- El signo positivo o negativo responde a los juegos de cilindros internos o externos. Un juego externo invierte la dirección de la rotación entre los cilindros y requiere el signo negativo.

Forma en el diente de engrane (Norton, 2009)

- Para que se cumpla la ley fundamental de engranaje, los contornos de los dientes que engranan deben conjugarse (combinarse) entre si.
- Sólo algunas curvas tienen aplicación práctica como dientes de engranes.
- La cicloide aún se utiliza como forma de dientes en relojes, pero en la mayoría de los demás engranes se utiliza la forma de curva involuta.
- La involuta es una curva que se genera al desenrollar una cuerda tirante de un cilindro (llamado evoluta).

- La cuerda siempre es tangente al cilindro.
- El centro de curvatura de la involuta siempre está en el punto de tangencia de la cuerda con el cilindro.
- Una tangente a la involuta siempre es normal a la cuerda, la longitud de la cual es el radio instantáneo de curvatura de la curva involuta.



Cambio de distancia entre centros

(Norton, 2009)

- El círculo de paso entra en juego cuando se crea un engranaje.
- Las limitaciones de los procesos de fabricación dan una probabilidad baja para lograr con exactitud la distancia entre centros ideal.
- Si la forma de los dientes del engrane no es una involuta, entonces el error en la distancia al centro violará la ley fundamental, y habrá variación en la velocidad de salida.
- Con una forma de diente en involuta, los errores en la distancia entre centros no afectan la relación de velocidad.
- Esta es la ventaja principal de la involuta sobre todas las demás formas de diente posibles y la razón por la que es casi universalmente utilizada para dientes de engranes.

Juego entre dientes (Norton, 2009)

- El juego entre dientes se define como el espacio libre entre dientes engranados medido en el círculo de paso.
- El incremento de la distancia entre centros incrementará el juego entre dientes y viceversa.
- Debe haber una pequeña diferencia entre el espesor de los dientes y el ancho del espacio
- Siempre que el par de torsión cambie de signo, los dientes se moverán de contacto en un lado u otro. El espacio libre será recorrido y los dientes chocarán con un ruido perceptible, provocando un error de posición indeseable en algunas aplicaciones.
- La Asociación Estadounidense de Fabricantes de Engranés (AGMA, por las siglas de American Gear Manufacturer's Association) define el diseño y fabricación de engranes.

Especificaciones de diente de engrane de profundidad total AGMA

Parámetro	Paso grueso ($p_d < 20$)	Paso fino ($p_d \geq 20$)
Ángulo de presión ϕ	20° o 25°	20°
Cabeza a	$1.000/p_d$	$1.000/p_d$
Raíz b	$1.250/p_d$	$1.250/p_d$
Profundidad de trabajo	$2.000/p_d$	$2.000/p_d$
Profundidad total	$2.250/p_d$	$2.200/p_d + 0.002$ pulg
Espesor de diente circular	$1.571/p_d$	$1.571/p_d$
Radio de filete o chaflán: cremallera básica	$0.300/p_d$	No estandarizado
Holgura básica mínima	$0.250/p_d$	$0.200/p_d + 0.002$ pulg
Ancho mínimo de cara superior	$0.250/p_d$	No estandarizado
Holgura (dientes esmerilados o pulidos)	$0.350/p_d$	$0.350/p_d + 0.002$ pulg

Paso diametral

- Una forma conveniente y común de definir el tamaño del diente es relacionarlo con el diámetro del círculo de paso, en lugar de relacionarlo con su circunferencia.
- El paso diametral p_d es

$$p_d = \frac{N}{d}$$

- Las unidades de p_d son $(\text{pulgadas})^{-1}$, o número de dientes N entre el diámetro de paso d en pulgadas.
- El sistema SI, utilizado para engranes métricos, define un parámetro llamado módulo, m , el cual es el recíproco del paso diametral con el diámetro de paso d medido en milímetros.

$$m = \frac{d}{N}$$

(Myszka, 2012)

- Aun cuando los engranes acoplados tienen diferentes diámetros y diferente número de dientes, deben tener el mismo paso diametral.
- El paso diametral no se mide directamente sobre el engrane.
- Con el objetivo de la estandarización de herramientas, la AGMA designó los pasos diametrales más usados.
- Los engranes están estandarizados en 20° y 25° . Los engranes con un ángulo de presión de 14.5° se consideran obsoletos.
- Como el ángulo de presión afecta la forma del diente, dos engranes acoplados también deben tener el mismo ángulo de presión.

Dientes de engrane estándar (Norton, 2009)

- Los dientes de engrane estándar de profundidad completa tienen una cabeza igual en el piñón y engrane, con la raíz un poco más grande por la holgura.
- Las dimensiones de diente estándar se definen en función del paso diametral.
- Existe una relación inversa entre p_d y el tamaño del diente. Si bien no existen restricciones teóricas en los valores posibles de paso diametral, se define un conjunto de valores estándar con base en las herramientas de corte de engranes disponibles.

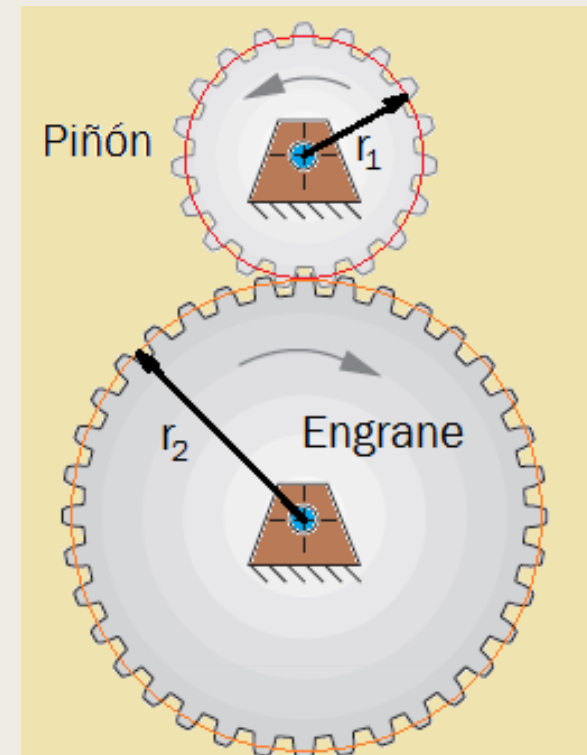
Distancia entre centros (Myszka, 2012)

- La distancia entre centros C se define como la distancia de un centro a otro entre dos engranes acoplados, que también es la distancia entre los ejes que soportan los engranes.

$$C = r_1 + r_2 = \frac{d_1 + d_2}{2}$$

- De la ecuación del paso diametral

$$d = \frac{N}{p_d}, \text{ entonces } C = \frac{N_1 + N_2}{2p_d}$$



(Norton, 2009)

Cinemática de un engranaje recto (Myszka, 2012)

- La velocidad en el punto de paso es la misma para ambas ruedas

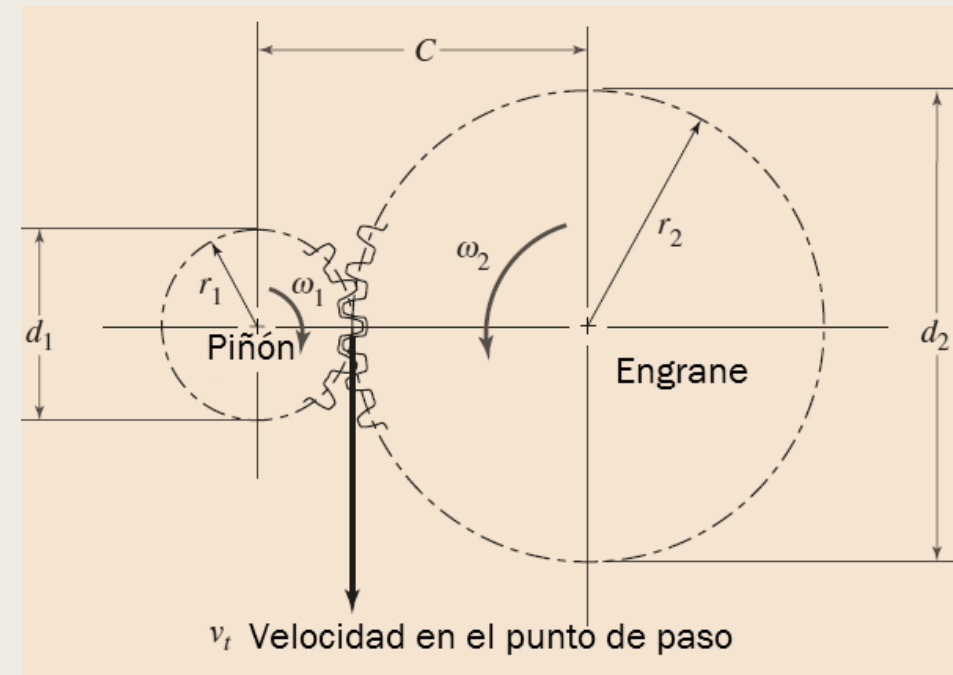
$$v_t = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

- De aquí que

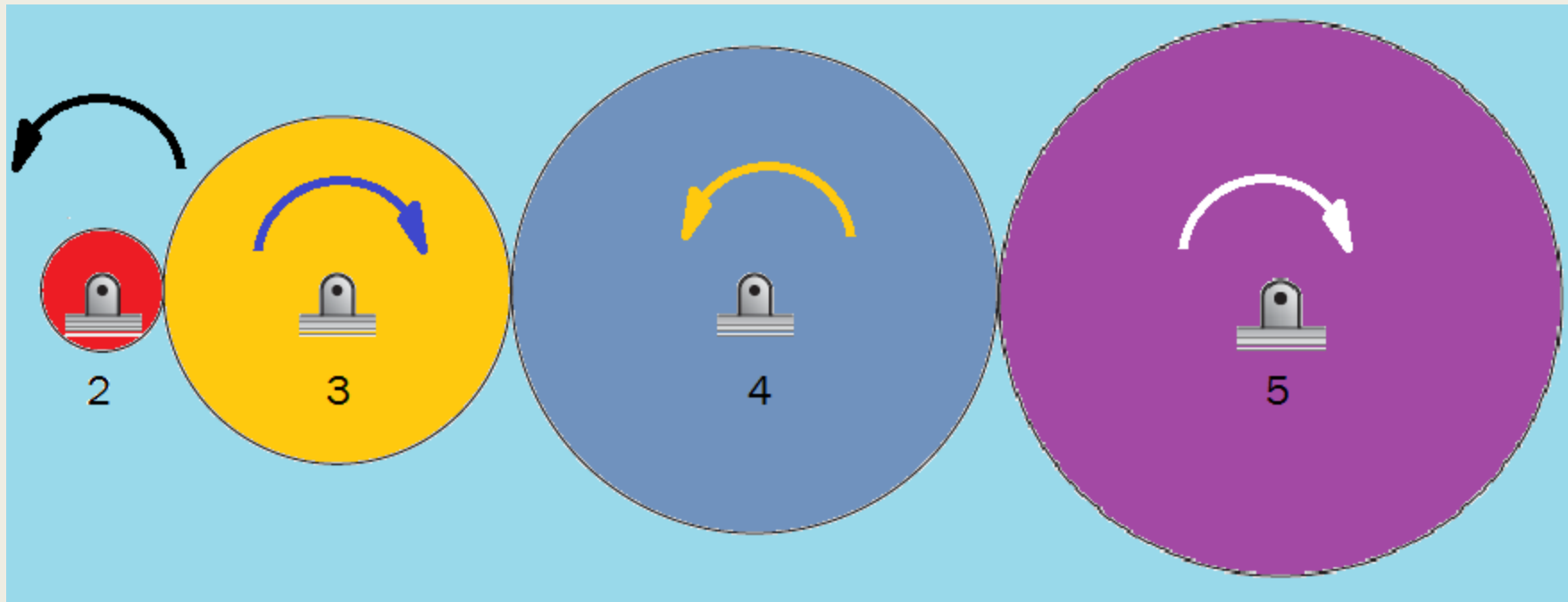
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2r_2}{2r_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{N_2}{p_d}}{\frac{N_1}{p_d}} = \frac{N_2}{N_1}$$

- Además

$$\omega_1 = \omega_2 \left(-\frac{d_2}{d_1} \right) = \omega_2 \left(-\frac{N_2}{N_1} \right)$$



Trenes de engranajes simples



Un tren de engranes es cualquier conjunto de dos o más engranes conectados. En un tren de engranes simple cada eje porta sólo un engrane (Norton, 2009)

Relación de velocidades angulares en trenes de engranajes simples

- Suponiendo conocidas las velocidades angulares de las ruedas 2 y 5, y sabiendo que

$$\omega_{salida} = \omega_{entrada} \left(-\frac{d_{entrada}}{d_{salida}} \right) = \omega_{entrada} \left(-\frac{N_{entrada}}{N_{salida}} \right)$$

- Entonces

$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = \left(-\frac{\omega_5}{\omega_4} \right) \left(-\frac{\omega_4}{\omega_3} \right) \left(-\frac{\omega_3}{\omega_2} \right) = \left(-\frac{d_4}{d_5} \right) \left(-\frac{d_3}{d_4} \right) \left(-\frac{d_2}{d_3} \right) = \left(-\frac{N_4}{N_5} \right) \left(-\frac{N_3}{N_4} \right) \left(-\frac{N_2}{N_3} \right)$$

- Por lo tanto

$$\frac{\omega_5}{\omega_2} = -\left(\frac{d_2}{d_5} \right) = -\left(\frac{N_2}{N_5} \right)$$

- Se concluye que

$$\frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \pm \left(\frac{\text{Producto del número de dientes de ruedas impulsoras}}{\text{Producto del número de dientes de ruedas impulsadas}} \right)$$

- Con un número par de engranes externos en el tren la dirección de salida será opuesta a la de entrada (Norton, 2009).
- Para un número impar de engranes externos en el tren, la salida será en la misma dirección que la entrada (Norton, 2009).
- En el caso de engranes rectos y helicoidales paralelos, las direcciones suelen corresponder a la regla de la mano derecha y son positivas para la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj (Budynas & Nisbett, 2012).

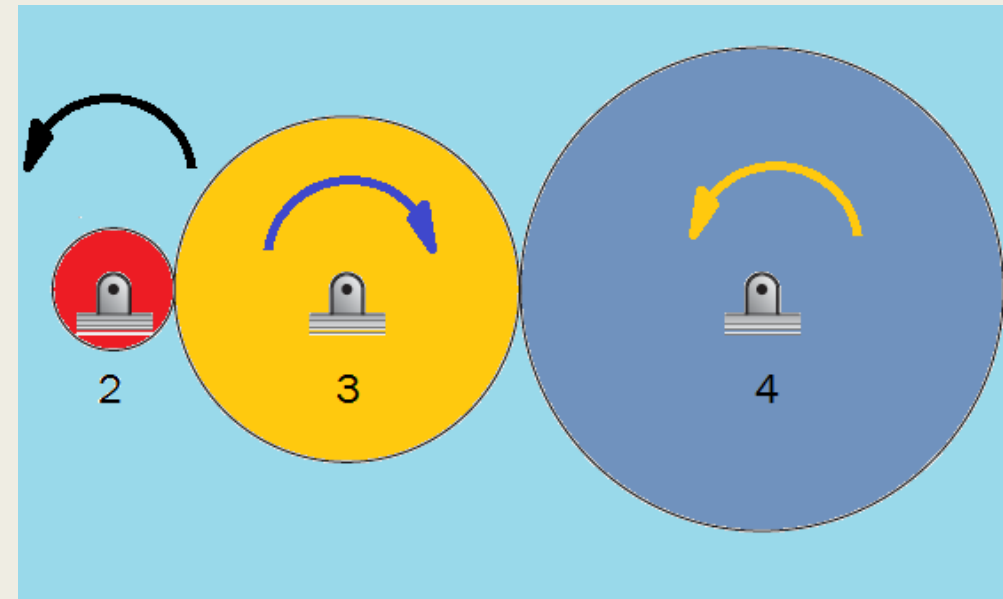
Diseño de trenes de engranajes

(Budynas & Nisbett, 2012)

- Con el número de dientes en los engranes se obtiene los diámetros de paso.
- Se determinan las etapas para obtener la relación total.
- Para minimizar el diseño se mantienen las partes tan equitativamente divididas entre las etapas como sea posible. Si se necesita de un valor del tren exacto, se intenta factorizar el valor del tren total en componentes enteros para cada etapa.
- Se asigna el engrane o engranes más pequeño(s) al número mínimo de dientes que permite la relación específica de cada etapa, con el fin de evitar la interferencia.
- Por último, aplicando la relación a cada etapa, se determina el número necesario de dientes para los engranes acoplados. Se redondea al entero más próximo y se verifica que la relación total resultante se encuentre dentro de una tolerancia aceptable.

Ejemplo

- Se requiere diseñar un tren de engranaje en donde la rueda dos gire a 1000 rpm y, la rueda 4, a 500 rpm, ambas en el mismo sentido.
- El pivote fijo de la rueda 2 debe estar a 25.4 pulg. del pivote fijo de la rueda 4. Se permite una desviación de 1 %.
- Obtenga los diámetros de las ruedas así como el número de dientes de cada una.



Solución

- La distancia entre ambas ruedas se puede representar por la siguiente ecuación

$$C = r_2 + 2r_3 + r_4 = \frac{d_2 + 2d_3 + d_4}{2} = 25.4 \quad \text{.....1}$$

- Ya que p_d tiene el mismo valor para las tres ruedas

$$d_2 + 2d_3 + d_4 = \frac{N_2 + 2N_3 + N_4}{p_d} = 2(25.4) = 50.8 \quad \text{.....2}$$

- De la relación de número de dientes y velocidad angular se tiene

$$N_3 = N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) \quad \text{.....3}$$

$$N_4 = N_3 \left(\frac{\omega_3}{\omega_4} \right) = N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) \left(\frac{\omega_3}{\omega_4} \right) = N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right) \quad \text{.....4}$$

- Sustituyendo 3 y 4 en 2

$$N_2 + 2N_3 + N_4 = N_2 + 2N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) + N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right) = 50.8p_d$$

- Dejando como factor común a N_2

$$N_2 \left[1 + 2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right) \right] = 50.8p_d$$

- Donde

$$\left[1 + 2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) + \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right) \right] = \frac{50.8p_d}{N_2}$$

- Se tiene como dato que $\omega_2 = 1000$ rpm y $\omega_4 = 500$ rpm
- Como incógnitas están ω_3 , p_d y N_2
- A continuación se muestran algunos pasos diametrales y números de dientes comerciales.

Número de dientes para engranes

(Myszka, 2012)

32 Paso diametral								
12	16	20	28	36	48	64	80	112
14	18	24	32	40	56	72	96	128
24 Paso diametral								
12	18	24	30	42	54	72	96	144
15	21	27	36	48	60	84	120	
20 Paso diametral								
12	16	24	35	50	80	100	160	
14	18	25	40	60	84	120	180	
15	20	30	45	70	90	140	200	

16 Paso diametral

12	16	24	32	48	64	96	160
14	18	28	36	56	72	128	192
15	20	30	40	60	80	144	

12 Paso diametral

12	15	20	28	42	60	84	120	168
13	16	21	30	48	66	96	132	192
14	18	24	36	54	72	108	144	216

10 Paso diametral

12	16	24	30	45	55	80	120	200
14	18	25	35	48	60	90	140	
15	20	28	40	50	70	100	160	

8 Paso diametral

12	16	22	32	44	60	80	112
14	18	24	36	48	64	88	120
15	20	28	40	56	72	96	128

- Mientras más grande sea el paso diametral, el engrane tendrá más dientes y será fino. De lo contrario, tendrá menos dientes y será burdo.
- Como no se sabe para qué se utilizará el tren de engranes, se considera un paso diametral pequeño.
- Por ejemplo, al considerar $p_d = 12$ se tiene un valor de $50.8 \times 12 = 609.6$.
- Buscando en las tablas el número de dientes para un paso diametral de 12, se considera de 108 ya que la rueda 2 debe tener el menor número de dientes de todas las ruedas.

- Por lo tanto

$$\left[1 + 2 \left(\frac{1000}{\omega_3} \right) + \left(\frac{1000}{500} \right) \right] = \frac{50.8(12)}{108} = 5.644$$

- Resolviendo la ecuación se obtiene que $\omega_3 = 756.3025$ rpm

- Considerando una velocidad angular de 756.3025 rpm los números de dientes para las ruedas 3 y 4 son

$$N_3 = N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) = 108 \left(\frac{1000}{756.3025} \right) = 142.8$$

$$N_4 = N_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_4} \right) = 108 \left(\frac{1000}{500} \right) = 216$$

- De las tablas se puede verificar que, para un paso diametral de 12, el número de dientes más cercano a 142.8 es de 144 dientes. Para la rueda 4, el valor se encuentra en tablas.
- Se debe tomar en cuenta que si se incrementa el número de dientes de una rueda, se reduce el número de dientes de la otra rueda, y viceversa. Considerando aceptables los valores obtenidos en tablas, se determinan las condiciones finales.
- Con las velocidades angulares y los números de dientes de cada rueda se verifica el diseño
- $N_2 = 108$, $\omega_2 = 1000$ rpm, $N_3 = 144$, $\omega_3 = 756.302$ rpm, $N_4 = 216$, $\omega_4 = 500$ rpm

- La distancia entre centros es

$$\frac{N_2 + 2N_3 + N_4}{p_d} = \frac{108 + 2(144) + 216}{12} = 51$$

- Donde $\{(51/50.8) - 1\}100 = \{0.003937\}100 = 0.3937\%$. Es decir, el error es menor que 1%, de acuerdo a los que se pide.

- Ahora se verifica la velocidad angular final

$$\omega_4 = \omega_2 \left(\frac{N_2}{N_4} \right) = 1000 \left(\frac{108}{216} \right) = 500 \text{ rpm}$$

- Donde $\{(500/500) - 1\}100 = \{0.00\}100 = 0\%$. En este caso no hay error.

- Y para la rueda 3

$$\omega_3 = \omega_2 \left(\frac{N_2}{N_3} \right) = 1000 \left(\frac{108}{144} \right) = 750 \text{ rpm}$$

- Donde $\{(756.3025/750) - 1\}100 = \{0.00840\}100 = 0.847\%$. Es decir, el error es menor que 1%, de acuerdo a los que se pide.

Bibliografía

- Budynas, R. G., & Nisbett, J. K. (2012). Diseño en ingeniería mecánica de Shigley. México: McGraw-Hill.
- Hyperion_Global_Partners. (2017). HGP Solution Pack: New Business Intake. Obtenido de Hyperion GP: <http://www.hyperiongp.com>
- Mallet, M. (19 de Octubre de 2015). The Great Meshing. Obtenido de The now world reflections of our times: <https://www.markmallett.com>
- Martin, G. H. (1982). Kinematics and dynamics of machines. New Dheli: McGraw-Hill.
- Myszka, D. H. (2012). Machines and mechanisms. Applied kinematics analysis. New Jersey: Prentice Hall.
- Norton, R. L. (2009). Diseño de maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos. México: Mc Graw-Hill.